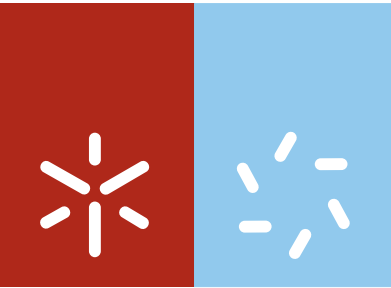




Diana Marcela Oliveira Alves      **MODELO DE PREVISÕES DE PROVEITOS E CUSTOS E OTIMIZAÇÃO DE LUCROS NUMA EMPRESA DE TELECOMUNICAÇÕES**

UMinho | 2011

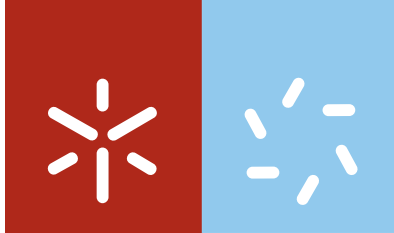


**Universidade do Minho**  
Escola de Ciências

Diana Marcela Oliveira Alves

**MODELO DE PREVISÕES DE PROVEITOS E CUSTOS E OTIMIZAÇÃO DE LUCROS NUMA EMPRESA DE TELECOMUNICAÇÕES**

Outubro de 2011



**Universidade do Minho**

Escola de Ciências

Diana Marcela Oliveira Alves

## **MODELO DE PREVISÕES DE PROVEITOS E CUSTOS E OTIMIZAÇÃO DE LUCROS NUMA EMPRESA DE TELECOMUNICAÇÕES**

Relatório de Estágio  
Mestrado em Estatística de Sistemas

Trabalho realizado sob a orientação da  
**Doutora Isabel Espírito Santo**  
e do  
**Doutor Fernando Romero**

Outubro de 2011

É AUTORIZADA A REPRODUÇÃO PARCIAL DESTE RELATÓRIO APENAS PARA EFEITOS DE INVESTIGAÇÃO, MEDIANTE DECLARAÇÃO ESCRITA DO INTERESSADO, QUE A TAL SE COMPROMETE;

Universidade do Minho, \_\_\_\_/\_\_\_\_/\_\_\_\_

Assinatura: \_\_\_\_\_

# Agradecimentos

Este projeto apenas foi realizado devido às pessoas que direta ou indiretamente colaboraram na sua concretização. Desta forma, quero expressar os meus sinceros agradecimentos.

A todas as equipas da empresa, com quem trabalhei, demonstro a minha gratidão por todos os conselhos e ajudas prestadas nos momentos de maior pressão. Foram fundamentais para a concretização do estágio.

À orientadora da empresa e ao orientador Doutor Fernando Romero um obrigada pela atenção e apoio disponibilizados.

À orientadora Doutora Isabel Espírito Santo agradeço de uma forma especial toda a compreensão, paciência e todas as críticas e sugestões que me permitiram finalizar esta etapa.

Aos colegas do mestrado, com quem tive imenso gosto de partilhar conhecimentos nestes últimos dois anos, um sincero obrigada.

À Susana e à Graça um obrigada do tamanho do mundo, foram os meus pilares neste percurso.

Ao Rui, meu companheiro de estágio um agradecimento especial pelo apoio em todos os momentos.

A todos os professores que se cruzaram comigo durante o meu percurso académico um muito obrigada, também contribuíram para este resultado.

Aos meus amigos, um grande obrigada pela vossa amizade.

Por último, não poderia deixar de agradecer à minha família pela força e apoio que me deram em todo o meu percurso académico. Obrigada por tudo.



# Resumo

O presente relatório tem por base a atividade realizada durante seis meses no âmbito do estágio curricular do Mestrado em Estatística de Sistemas da Universidade do Minho, numa empresa de telecomunicações. O estágio decorreu no período de 3 de janeiro a 30 de junho com 8 horas diárias durante 5 dias por semana.

O estágio foi orientado e supervisionado por um membro da empresa pertencente à Comissão Executiva e pelos professores Doutora Isabel Espírito Santo e Doutor Fernando Romero, professores auxiliares do Departamento de Produção e Sistemas da Universidade do Minho.

Nos dias de hoje, é fundamental que as empresas adquiram métodos eficazes para controlarem as suas atividades. É importante criarem planos para se focarem nos pontos mais frágeis de modo a reverterem a situação. Foi neste contexto que surgiu o tema do estágio.

A empresa carecia de manobras de controlo relativas à venda de produtos e serviços. A ineficiência de estratégias estavam a prejudicar o funcionamento da empresa, no sentido da falta de domínio do seu próprio desempenho. O ramo em questão refere-se às comissões obtidas pelos serviços de comunicações. Durante este período foram reparadas algumas falhas existentes, bem como melhorias nas estratégias implementadas.

O relatório teve a finalidade de descrever a atividade realizada como também abordar um tema fulcral para o melhoramento do desempenho da empresa. São delineadas as estratégias aplicadas no decorrer do estágio, e é feito um estudo sobre a otimização, com a resolução de um problema real. Verifica-se de forma evidente que a otimização pode ser aplicada na atividade da empresa em questão. Neste sentido, este trabalho vem reforçar a ideia de que a otimização é um caminho acertado na busca de melhores resultados.



# Abstract

This report is based on the activity carried out for six months in the training curriculum of the Master in System Statistics, University of Minho, in a telecommunications company. The work took place in the period from January 3 to June 30 with 8 hours per day, 5 days a week.

This training work was guided and supervised by a member of the company belonging to the Executive Board and Professors Isabel Espírito Santo and Fernando Romero, assistant professors in the Department of Production and Systems at the University of Minho.

Nowadays, it is essential that companies acquire effective methods to control their activities. It is important to create plans to focus on the weakest points in order to reverse the situation. In this context, the theme emerged.

The company lacked control maneuvers for the sale of products and services. The inefficiency of strategies were undermining the company's operation in the sense of lack of knowledge of their own performance. The branch in question refers to the commissions earned by communications services. During this period some flaws were repaired, as well as improvements in the strategies implemented.

The report aimed to describe the activity performed as well as addressing a key theme for the improvement of company performance. The strategies applied during the work are outlined, and is made a study on optimization, with the resolution of a real problem. It appears clearly that optimization can be applied to the activity of the company in question. In this sense, this work reinforces the idea that the optimization is the right path in the search of better results.





# Conteúdo

Agradecimentos	iii
Resumo	v
Abstract	vii
1 Introdução	1
I Contextualização	3
2 A História das Telecomunicações	5
3 A Empresa	9
3.1 Organização e Funcionalidades . . . . .	10
3.2 Produtos e Serviços . . . . .	11
II O Trabalho na Empresa	13
4 Atividades Realizadas	15
4.1 Aplicação de Cruzamento de Dados . . . . .	16
4.2 Análise dos Resultados da Aplicação . . . . .	19
4.3 Progresso do Trabalho . . . . .	20
4.4 Análise de Comissões . . . . .	22
4.5 Análise de Reclamações . . . . .	24

<b>III</b>	<b>Métodos do Gradiente para Otimização Não Linear</b>	<b>25</b>
5	Introdução	27
6	Forma Geral do Problema	29
7	Condições de Otimalidade	31
7.1	Classificação de Mínimos e de Máximos . . . . .	31
7.2	Condição Necessária e Suficiente de Primeira Ordem . . . . .	32
7.3	Condição Necessária de Segunda Ordem . . . . .	32
7.4	Condição Suficiente de Segunda Ordem . . . . .	32
7.5	Convexidade . . . . .	32
8	Método de Newton	35
8.1	Propriedades do Método de Newton . . . . .	36
8.2	Limitações do Método de Newton . . . . .	37
8.3	Desvantagens do Método de Newton . . . . .	37
9	Técnicas de Globalização	39
9.1	Procura Unidimensional - Critério de Armijo . . . . .	39
10	Método Quasi-Newton	41
10.1	A Matriz $H$ . . . . .	42
10.2	Propriedades do Método Quasi-Newton . . . . .	43
<b>IV</b>	<b>Otimização de um Problema Real</b>	<b>45</b>
11	Descrição do Problema	47
12	Resolução do Problema em MATLAB <sup>R</sup>	49
13	Resultados	55
<b>V</b>	<b>Conclusões</b>	<b>59</b>

# Capítulo 1

## Introdução

Este estágio surgiu no Mestrado em Estatística de Sistemas para proporcionar aos alunos uma oportunidade de aplicar os conhecimentos adquiridos ao longo da vida académica no setor empresarial.

A competitividade entre as empresas tem aumentado bastante, ditando, desta forma, a necessidade destas encontrarem estratégias eficazes de forma a permanecerem e se evidenciarem no mercado. Evitar perdas de dinheiro e maximizar os lucros, é sem dúvida, um dos principais objetivos. Ter sucesso neste ponto em particular não é tarefa fácil, em especial quando o negócio das empresas é demasiado amplo. É necessário estudar com rigor estratégias adequadas ao problema. O ponto de partida, começa pela organização de toda a informação necessária que possa ser útil. Neste sentido, as empresas devem implementar tecnologias operacionais adequadas às suas necessidades para controlarem a sua atividade e daí poderem controlar as margens de lucro e gerirem novas formas de o maximizarem. Para além disso, devem efetuar sucessivas análises para que seja estudado o percurso da empresa. Estas análises permitirão às empresas ter conhecimento sobre os produtos ou serviços mais rentáveis, as áreas de maior retorno e também descobrir falhas que possam estar a ocorrer. Com este estudo detalhado, as empresas podem controlar, e até mesmo encontrar novas estratégias de manobra, de modo a evitar gastos desnecessários.

O objetivo principal, na empresa, baseou-se na escolha de estratégias para

evitar a perda de dinheiro no que diz respeito às comissões obtidas através da venda de produtos, assim como formas de maximizar os lucros.

“Nos ambientes actuais faz, pois, sentido que as organizações desenvolvam capacidades para planear com antecipação o que está 'do outro lado da esquina', adaptando-se ao que está a 'acontecer agora' e respondendo aos acontecimentos de impacto. Também faz sentido treinar todos os membros da organização de forma a contribuírem para o desafio de sobrevivência e sucesso.”,[8]. É no sentido da citação anterior que se estruturou todo o trabalho.

O relatório está dividido em cinco partes. Na parte I é feito um resumo da História das Telecomunicações e também a descrição da empresa onde foi realizado o estágio. A parte II refere-se a toda a actividade desenvolvida na empresa, sendo abordadas de forma detalhada todas as tarefas realizadas. Na parte III é feita uma revisão bibliográfica sobre a optimização não linear, em que se descrevem alguns métodos de resolução, dando-se ênfase aos métodos do gradiente. Na parte IV é relatada a aplicação dos métodos do gradiente num problema real de maximização de lucros, utilizando dados reais da empresa, apresentando-se uma solução ótima a este problema. Para finalizar o relatório, apresentam-se na parte V as conclusões mais importantes do trabalho.

# Parte I

## Contextualização



## Capítulo 2

# A História das Telecomunicações

Um dos setores que mais tem evoluído nas últimas décadas é, sem dúvida, o setor das telecomunicações. A procura em torno das tecnologias de informação tem acumulado, a cada passo, interessados, adeptos e, essencialmente, aqueles que precisam das tecnologias de informação no trabalho e nas suas vidas pessoais. O telemóvel é, talvez, o meio de comunicação mais utilizado entre os portugueses e na população mundial em geral. É considerado uma história de sucesso no mundo da tecnologia. A adesão dos consumidores foi extremamente rápida e a sua evolução tem acompanhado todos os interesses e necessidades dos utilizadores. Para além da sua principal vantagem, que é o facto de permitir o contacto a qualquer hora, em qualquer parte do mundo, o telemóvel evoluiu imenso. Atualmente são aparelhos muito sofisticados, quer a nível de *design*, quer a nível de tecnologia. Permitem enviar mensagens, tirar fotos, filmar, despertar, gravar lembretes, jogar, ouvir música, aceder à internet entre outras funcionalidades. Pode-se afirmar que conceber um mundo sem telemóvel afigura-se, hoje em dia, se não impossível, certamente muito difícil. Para uma visão global de toda esta evolução, basta olhar um pouco para a sua história. Em 1973, através de Martin Cooper, realizou-se a primeira chamada. O primeiro telemóvel comercializado a nível global foi em 1983, um Motorola Dynatac. Media 33 centímetros de compri-



mento, 12 centímetros de largura e 7 centímetros de espessura. Pesava cerca de 2,5 quilogramas e a sua bateria durava menos de dez horas em modo de espera. Permitia fazer chamadas durante apenas uma hora. A sua única função era a realização de chamadas. Este telemóvel dispunha de uma antena de borracha que o tornava ainda maior. Funcionava em rede analógica<sup>1</sup> ou NMT<sup>2</sup> (*Nordic Mobile Telephony*) e o seu preço rondava os 4000 dólares, cerca de 2800 € [11]. A partir dessa data, os progressos foram imensos. Em 1992 foi enviada a primeira SMS (*Short Message Service*) e em 1997 foram comercializados telemóveis com máquina fotográfica. O acesso à Internet deu-se em 1999, em 2001 surgiu a rede 3G e mais recentemente a geração 4G [11]. Em Portugal, estes equipamentos surgiram nos finais dos anos 80 ao cargo dos CTT/TLP (Correios de Portugal). Foi este organismo que em 1992 criou a TMN -Telecomunicações Móveis Nacionais S.A. [12]. Rapidamente, surgiram no mercado outras operadoras: a Telecel, hoje designada por Vodafone, a Optimus, entre outras. Segundo estudos da ONU<sup>3</sup>, as assinaturas de telefones móveis ultrapassaram já os cinco mil milhões em todo o mundo. No início do ano 2000 existiam apenas 500 milhões de assinaturas [13]. No primeiro trimestre de 2005 existiam em Portugal mais telemóveis ativos do que o número de habitantes, cerca de 10.6 milhões, segundo informação fornecida pela Autoridade Nacional das Comunicações (ANACOM) [14].

A Internet, a par do telemóvel, talvez tenha sido uma das maiores revoluções no mundo da tecnologia. Se com o telemóvel estamos sempre contactáveis, com a Internet existe a possibilidade de nos interligarmos em qualquer parte do mundo e a informação global está apenas à distância de um clique. Atualmente, como já mencionado, o telemóvel também tem já algumas aplicações de acesso à Internet. A Internet surgiu nos Estados Unidos da América no tempo da Guerra Fria, sendo que os seus fins eram unicamente militares e assim continuaram por um longo período [12]. A ARPA (*Advanced Research Projects Agency*) desenvolveu a ARPANET, e a partir desta permitiu-se a algumas Universidades interligarem-se e trocarem informações

---

<sup>1</sup>Sinal transmitido através de ondas[15]

<sup>2</sup>Rede telefónica nórdica baseada em rede analógica[16]

<sup>3</sup>Organização das Nações Unidas

entre si [12]. O acesso era restrito e estava sob o controlo militar. Deste modo, desenvolveu-se a Internet e nos finais dos anos 70 começaram a ser permitidas ligações entre computadores e redes, independentemente do equipamento ou software utilizado. Em 1983, a ARPANET foi dividida em duas redes: a MILNET e a ARPNET, a primeira para uso militar e a segunda para investigação e desenvolvimento [12]. Para além disto, adotaram-se os protocolos TCP (*Transmission Control Protocol*) e o IP (*Internet Protocol*). O TCP garante maior segurança na partilha de dados e o IP assegura a comunicação entre computadores.

Os primeiros utilizadores foram as universidades, fazendo uso da Internet para fins académicos e educacionais. Em Portugal esta tendência também foi seguida. Em 1991 as Universidades, no seu geral usufruíam da rede Internet[12]. Em 1994, a criação do ISP (*Internet Service Provider*), vulgarizou o uso da Internet, mas foi em 1995, quando os órgãos de comunicação social começaram a difundir a existência desta que se verificou um maior impacto, aumentando significativamente o número de utilizadores em Portugal. Presentemente existem vários ISP e o acesso à Internet pode ser feito através da rede fixa com possível *wireless* e através de banda larga móvel. Segundo informações da ONU [13], no final de 2010 cerca de 2 mil milhões de usuários usufruíam de Internet, cerca de 555 milhões de *internautas* navegavam através da banda larga fixa, e através da banda larga móvel foram contabilizados 940 milhões de utilizadores.

Antes da criação do telemóvel e da existência da Internet, as comunicações eram realizadas através da rede fixa. Hoje em dia a sua utilização tornou-se um pouco desvalorizada, tendo sofrido um decréscimo significativo de utilizadores. Segundo estimativas da ONU, em 2010 existiam cerca de 1.2 mil milhões de assinaturas da rede fixa [13].

Atualmente existe muita oferta nos produtos e serviços mencionados. Existe a possibilidade do consumidor usufruir de Internet, vários canais de televisão e telefone fixo, tudo no mesmo pacote. Como exemplo deste serviço podem referir-se a Meo, a Zon, a Vodafone Casa, entre outros.



## Capítulo 3

### A Empresa

A empresa X (sigla fictícia que será utilizada para designar a empresa no decorrer do relatório) é uma empresa ligada ao setor das telecomunicações com atividade em Portugal Continental. De momento, a empresa dispõe de escritórios no Porto, Lisboa e Faro e possui 28 lojas especializadas em telecomunicações espalhadas por todo o país: Barcelos, Braga (5 lojas), Cascais (2 lojas), Chaves, Felgueiras, Gondomar, Guimarães, Marco de Canavezes, Marinha Grande, Ponte de Lima, Porto (3 lojas), Póvoa de Lanhoso, Santarém, Torres Novas, Torres Vedras (2 lojas), Viana do Castelo (4 lojas) e Vila Real[9][10]. A X possui também uma rede de Agentes que agrega mais de 300 entidades a nível nacional[9][10].

A X surgiu com a liberalização das telecomunicações em Portugal. Com vontade de crescer e dar um passo importante neste setor, a X, em 1992, e já com sede em Braga, fez o seu primeiro contrato com a Telecel[9][10]. Este teve a duração de 6 anos e nesse período surgiu em Guimarães a primeira loja de Agente Autorizado, marcando a entrada no canal do Retalho com lojas oficiais. Em 1994 e 1995 liderou o núcleo fundador da Bragatel (Companhia de televisão por Cabo de Braga, S.A.) e formalizou a entrada no capital da Sipare<sup>1</sup> - Engenharia e Telecomunicações, Lda[9][10].

Passados três anos, a X teve uma elevada expansão, assinando um Acordo Global com o Grupo Portugal Telecom (PT), resultando, em consequência,

---

<sup>1</sup>Sociedade de Investigação para Aproveitamento de Recursos Energéticos

contratos de agência, nomeadamente com a TMN, a TVCabo, a PT Comunicações e a PT Prime<sup>2</sup>, abandonando todos os anteriores. Parcerias com a Microsoft, com a Siemens e com outras empresas aumentaram o leque de ofertas da X para com os clientes, disponibilizando não só serviços de telecomunicações mas também de tecnologias de informação.

Nos anos seguintes, os produtos da PT Comunicações começaram a ser comercializados para o mercado residual, e para acompanhar todo o negócio em expansão abriram-se escritórios em Aveiro, Lisboa e Faro. Em 2006, a Espírito Santo Capital<sup>3</sup> adquiriu 55% do capital da empresa[9][10].

No decorrer de todos estes acontecimentos, assiste-se a um *spin-off* da PT Multimédia (PTM) surgindo a Zon Multimédia, detentora da Zon TV[9][10]. Querendo acompanhar todo este processo, concretizou-se em 2008 o *spin-off*<sup>4</sup> da X resultando no aparecimento da MX- Multimédia[9][10]. Mais tarde surgiu também a X World (XW), que se tornou parceira da Vodafone. De momento, a X é composta por mais duas empresas – a MX e a XW, tendo estas parcerias com a PT Comunicações e TMN, a Zon Multimédia e a Vodafone, respetivamente.

### 3.1 Organização e Funcionalidades

Como referido anteriormente, a X no seu todo é formada por mais do que uma empresa, o que implica que nem todos os produtos e serviços comercializados por cada uma delas sejam os mesmos, bem como as funções exercidas pelos seus colaboradores. A concorrência em torno das telecomunicações tem aumentado em grande escala e todo o processo de venda de um produto ou serviço deve ter sempre em conta todas as necessidades do cliente e deve ser feita de uma forma bem organizada. Como tal, a X, possui mais do que um canal para a comercialização dos seus produtos e serviços, e são divididas em dois ramos principais: o empresarial e o do consumo. Os canais

---

<sup>2</sup>Empresa do grupo PT que presta serviços e soluções de comunicação e informação ao mercado empresarial

<sup>3</sup>Sociedade de capital de risco do Grupo Espírito Santo Investment

<sup>4</sup>Reaparecimento de uma empresa a partir de um grupo de pesquisa de uma empresa

dividem-se em Vendas Diretas, Distribuição e Retalho. Todos estes canais têm o seu público-alvo já bem definido. As Vendas Diretas só têm funcionamento no ramo empresarial e proporcionam o privilégio de disponibilizarem uma equipa de comerciais que contacta diretamente com as empresas. A Distribuição estabelece a ligação com os agentes, no ramo empresarial e no ramo do consumo, que adquiram os produtos à X. O Retalho, já mencionado, refere-se às lojas oficiais da X.

## 3.2 Produtos e Serviços

Os produtos e serviços disponibilizados pela X podem dividir-se em três grupos:

- Telecomunicações Móveis

Existe a comercialização de uma extensa gama de telemóveis, que acompanham sempre os últimos modelos e, claro, cada um direcionado ao interesse do cliente disponibilizando os tarifários adequado.

- Multimédia - Internet

A variedade de oferta na Internet também é verificada. Opções como ADSL(Asymmetric Digital Subscriber Line), banda larga e *office box*<sup>5</sup> são alguns exemplos do leque de produtos disponibilizados pela X aos seus clientes.

- Serviços PT Comunicações (PTC)

Para ambos os ramos a X comercializa todos os serviços da PTC, que se estendem aos serviços de rede fixa, comunicações de dados e às bandas largas, sendo eles Acessos RDIS<sup>6</sup>, Acessos Analógicos, Internet, IPTV<sup>7</sup>, PTPRime e Meo.

---

<sup>5</sup>Produtos e serviços de internet e voz, móveis e fixos

<sup>6</sup>Informação enviada através de textitbits[15]

<sup>7</sup>Utiliza o protocolo IP Internet Protocol como meio de transporte do conteúdo[17]



## Parte II

# O Trabalho na Empresa





## Capítulo 4

### Atividades Realizadas

Quando se fala em controlo de perdas de dinheiro, associam-se de imediato os gastos que se tem no fabrico de material e na mão de obra associada. Mas, nem sempre são esses os custos que uma empresa tem. Tudo depende do tipo de empresa e em que ramo ela atua. A X encontra-se ligada à rede das telecomunicações, disponibilizando aos clientes vários produtos e serviços, entre eles, telemóveis, Internet, e outros. No entanto, os telemóveis e todo o equipamento gasto, por exemplo, na instalação de Internet fixa, cabos, *boxes*, não são produzidos nesta empresa, sendo que esta se limita a publicitar as campanhas de cada um e a realizar a venda.

Sendo assim, não existem custos com mão de obra ou material no fabrico de equipamentos. A questão que se coloca é, onde poderão estas empresas falhar levando a perdas de dinheiro. A resposta a esta questão torna-se bastante simples quando se percebe o modo como são obtidas as receitas. Nas empresas de telecomunicações, parte do retorno deve-se ao facto dos serviços e produtos vendidos gerarem receitas, ou seja, quando existe a venda de produtos, existe sempre uma comissão, ou várias, que revertem a favor da empresa. Tendo em conta que empresas como a X dispõem de uma rede de agentes e comerciais, significa que para estes também existirá uma comissão, ou várias, a receberem pelas vendas que efetuarem, sendo neste caso a X a proceder ao pagamento. Estas comissões são obtidas, a partir da venda de produtos e serviços, nas várias áreas em que a empresa atua: retalho,

distribuição e vendas diretas. É a partir dessas vendas que se podem controlar os valores que a empresa terá direito a receber. Dito de outra forma, a maior preocupação da empresa recai na previsão das comissões a receber logo após o ato da venda. Tendo a capacidade de tal previsão, a empresa torna-se capaz de saber de antemão, com uma margem de erro reduzida, o valor muito próximo daquele que irá receber. Esta previsão pode, assim, ser comparada com o valor real recebido. É este o ponto crítico onde podem surgir as perdas de dinheiro, uma vez que de forma frequente o valor recebido não corresponde ao que a empresa tem direito pelos serviços que prestou, havendo, por isso, direito a reclamação. Estas comparações devem ser analisadas regularmente para evitar estas perdas, que podem estender-se aos valores a serem comissionados aos agentes e comerciais devido a uma má previsão de valores. Assim, torna-se evidente que é fundamental um bom sistema de previsões.

Foi no contexto de proceder à análise exaustiva das comissões e criar ou melhorar estratégias de prevenção e controlo de comissões na atividade da empresa que este estágio foi projetado.

## 4.1 Aplicação de Cruzamento de Dados

Quando o estágio se iniciou, já existia na X uma aplicação para executar a análise mencionada. Esta aplicação prevê, a partir dos contratos registados, um conjunto de comissões referentes aos contratos realizados. Cada contrato, formalizado entre o cliente e a rede de telecomunicações adquirida, pode gerar uma ou mais comissões, dependendo do tipo de contrato estipulado. Estes são formalizados nas diversas áreas e todos são reenviados para a X para serem registados numa base de dados. O procedimento de registo é feito manualmente pelas *backoffices*<sup>1</sup>. Pelo facto deste registo ser feito de forma manual, a probabilidade de se cometerem erros é bastante elevada e, por consequência, as previsões podem levar a conclusões erradas. Devido a esta exposição ao erro, uma das primeiras tarefas executadas foi o preenchimento

---

<sup>1</sup>Colaboradoras que fornecem apoio aos agentes, aos comerciais e também aos clientes

de registos de contratos na base de dados, com o objetivo de se perceberem quais os campos de preenchimento que poderiam gerar mais dificuldades e, por consequência, resultarem daí diversos erros. O preenchimento dos dados na plataforma não é por si só uma tarefa complicada. No entanto, existem alguns contratos que tornam alguns campos excepcionais, e que, por isso, requerem mais atenção. Quando existem mensalmente muitos contratos a serem registados, o procedimento torna-se vulnerável ao erro humano. O preenchimento dos contratos também ajudou a perceber, a partir dos campos de preenchimento, quais as comissões associadas, os produtos que a empresa comercializa e os tarifários e serviços de que os clientes podem usufruir.

A par desta tarefa, nos primeiros dias, foram dados a conhecer os vários planos comissionais, tanto os de que a X usufrui como os planos comissionais que identificam os valores das comissões pagas aos agentes comerciais. Embora todos os produtos de todas as áreas sejam registados e analisados, apenas houve conhecimento do plano comissional dos agentes.

Nos primeiros dias foi feita uma apresentação à empresa e foi fornecida toda a informação acerca dos trabalhos realizados nos vários departamentos. Como o processo de análise já estava a decorrer, essa atividade foi encetada logo desde o início. À medida que se procedia essa análise, foi feito um acompanhamento para que essa tarefa pudesse passar em exclusivo para a estagiária. Este procedimento é bastante moroso e exige muita atenção, sendo, por isso, de grande responsabilidade.

A ideia essencial, para além de se verificar se as previsões estavam corretas de acordo com os contratos, era também comparar esses resultados com as comissões pagas à X. Dito de outra forma, o essencial é saber se a quantidade monetária prevista é igual à recebida. Neste sentido, a X desenvolveu uma aplicação que realiza essa comparação e posteriormente possibilita exportar os resultados para um ficheiro de fácil acesso para análise, tornando possível fazer, de uma forma mais expedita, este estudo, caso contrário tornava-se impossível, ou quase, fazer esta previsão. A aplicação, que é a mesma onde os contratos são inseridos, executa um processo de cruzamento de dados, isto é, compara as previsões com a informação recebida, podendo-se assim observar e analisar as eventuais diferenças. Este processo é realizado em cada mês,

sendo permitido escolher o mês pretendido e depois fazer o cruzamentos de dados, selecionando essa opção. Este cruzamento é feito tendo como base algumas variáveis, conforme a comissão gerada, durante um determinado intervalo de tempo, ou seja, com alguns meses para trás e outros para frente, em relação ao mês em análise. Isto porque existem comissões que podem ter data diferente da real ou até mesmo a comissão ser paga mais tarde. Por isso é necessário dar essa margem de manobra para que seja possível maximizar o número de cruzamentos. Após este procedimento, por vezes um pouco demorado, faz-se a exportação da informação diretamente para uma folha de Excel. Nesse ficheiro Excel vão encontrar-se todas as comissões relativas ao mês pedido. Para cada contrato estão implícitas uma ou mais comissões e irão aparecer tantas linhas quantas as comissões envolvidas. Cada linha diz respeito a uma comissão e está associada a várias colunas onde se encontra toda a informação do contrato. As variáveis presentes neste ficheiro são muitas, incluindo todas aquelas que se preenchem no ato de um contrato. Entre as mais importantes podem referir-se o número do contrato, o NIF (Número de Identificação Fiscal), o número de telemóvel, o tarifário, o tipo de contrato (uma fidelização ou uma angariação, por exemplo), o valor previsto, a área, e outras, sendo que, no total, são cerca de 32 variáveis. Todas elas são relativas às previsões e dizem respeito aos contratos. Existem ainda outras, na mesma folha Excel, que se referem às mesmas comissões, mas cuja informação é relativa ao que foi pago à X. São apenas apresentadas as variáveis mais importantes para poder ser feita a comparação de forma mais simples e eficiente. Com a informação aglomerada numa só folha, basta colocar algumas fórmulas que identifiquem se as comissões foram pagas da mesma forma que o previsto. Tratam-se de fórmulas que comparam, por exemplo, o tipo de tarifário, os descontos, o valor recebido, a área e outros. Com os resultados assim obtidos, pode-se concluir se a comissão em questão foi bem ou mal paga, identificando, se for caso disso, um erro. As informações das variáveis podem não ser compatíveis, ou não cruzar com outra informação.

Cada mês analisado tem cerca de 1000 a 1500 linhas em Excel, o que torna a análise mensal bastante demorada. Dependendo dos resultados obtidos através das fórmulas, é decidido se estes devem ou não ser revistos pelas

*backoffices* das áreas correspondentes.

## 4.2 Análise dos Resultados da Aplicação

Qualquer mensagem nas fórmulas, de dúvida ou erro, implica que os contratos sejam todos revistos. Foi desta forma que foram analisados os primeiros 6 meses do ano de 2010. Como o processo estava atrasado devido ao facto desta implementação ser recente, o outro objetivo era analisar e corrigir todo o ano de 2010. Isto porque, caso alguma comissão estivesse mal paga, a empresa poderia ainda reclamar à rede de telecomunicações associada o valor em questão.

Após a análise mensal, nos meses referidos, as comissões que não se encontravam corretas foram organizadas por áreas e reenviadas às *backoffices* para que o contrato fosse revisto. Ou seja, para um mês estar completamente analisado era necessário analisar as comparações dos valores previstos e recebidos, organizar os contratos para serem revistos e depois esperar por essas correções. Depois de recebidas as correções, era necessário fazer um novo cruzamento, verificar os resultados dessas novas comissões revistas e juntá-las às outras do mesmo mês que já se encontravam corretas. Com o mês corrigido, o passo seguinte era contabilizar as comissões incorretas e estudá-las quanto aos valores que poderiam ser recebidos caso se prosseguisse com a reclamação. Se a reclamação avançasse, era necessário ter o máximo de segurança e fundamento em relação a esta. No caso de persistirem dúvidas é preferível evitá-la, uma vez que se não houver um fundamento sólido, podem surgir penalizações para a empresa.

Para além de ser um trabalho moroso, é também dependente das *backoffices*, já que não é possível avançar sem as devidas correções nos contratos, guardados na base de dados. Isto acontecia porque a tarefa de rever os contratos era um trabalho adicional das *backoffices*, que nem sempre tinham disponibilidade para o fazer. Acresce a isto os problemas informáticos, que por vezes surgiam.

Como se pode constatar, o trabalho não depende apenas de quem analisa as comissões mas também de várias pessoas de outros departamentos. Com a

pressão de cumprir objetivos nas datas estipuladas e necessidade de recorrer a diferentes departamentos para se obterem todos os contratos corrigidos é, sem dúvida, essencial manter boas relações interpessoais, saber lidar com as pessoas e não esquecer que a comunicação é o motor de arranque de qualquer tarefa imposta a uma equipa de trabalho.

### 4.3 Progresso do Trabalho

Até à segunda semana de Fevereiro foram analisados os 6 primeiros meses do ano 2010. Estes meses foram analisados em conjunto com um colega de trabalho e foi o primeiro objetivo do trabalho, que foi cumprido dentro do prazo estipulado.

Neste primeiro processo de análise verificaram-se algumas incongruências quanto às comissões previstas, supostamente incorretas, e o número de contratos revistos que na realidade estavam corretos. Como uma parte dos contratos que foram pedidos às *backoffices* estavam corretos, os erros tinham de ter, obrigatoriamente, outra origem. Assim, foi verificado que muitos erros diziam respeito ao sistema informático. Para as previsões estarem corretas era necessário que a aplicação se encontrasse a funcionar de forma atualizada, isto é, todos os tarifários deveriam estar registados na aplicação para que, quando os contratos fossem registados ficassem corretos. Existiam campos de preenchimento que deveriam ser obrigatórios de forma a evitarem-se os erros. Por isso havia muitas alterações a serem feitas. Desta forma, fez-se uma lista de alterações que facilitam tanto as *backoffices* no registo dos contratos bem como a análise das comissões. Com estas alterações, a percentagem de erros é bastante menor.

Para os restantes meses de 2010, a análise já foi feita sem qualquer apoio da parte de colegas. Como se verificou que quando surgiam erros nem sempre isso significava um mau registo do contrato, mudou-se a estratégia de correção.

Os primeiros passos foram feitos como anteriormente, mas após aplicar as fórmulas e obter uma série de comissões com algum campo diferente do recebido, analisou-se uma por uma cada uma dessas diferenças para que

se percebesse o porquê de surgirem tais erros, pois quando eram enviados todos os contratos para serem revistos muitos erros passavam despercebidos. Apesar de se demorar mais tempo a analisar as comissões, os contratos a ser revistos eram significativamente menos e era mencionado às colegas de forma clara onde se encontrava o erro. Desta forma conseguia reduzir-se o tempo do procedimento no seu todo. Existiam várias particularidades. Por vezes era o número do cartão de telemóvel ou do cartão de dados que estava errado, e isso bastava para as comissões serem incompatíveis. Ou por exemplo, o tipo de comissão que era pago de forma diferente. Para se detetarem estes pormenores foi necessário perceber de forma clara o que o contrato estava a gerar, preenchido daquela forma e só depois comunicar às *backoffices* para que estas efetuassem as devidas alterações. Com a análise feita desta forma, estas precisavam de muito menos tempo para alterar os contratos errados, uma vez que lhes eram pedidas cerca de cinco vezes menos alterações. Uma vez que estavam envolvidos três departamentos diferentes, e estes nem sempre trabalham à mesma velocidade, o processo de verificação e correções por vezes era muito atrasado. No entanto, com esta alteração as correções passaram a ser feitas num curto espaço de tempo. Os últimos meses de 2010 foram corrigidos seguindo este modelo e no final da análise foram organizadas as reclamações que foram posteriormente enviadas às entidades responsáveis.

Durante este período de análises e correções, foi verificado, após uma reunião com o responsável e representante de uma das redes de telecomunicações na empresa, a existência de um erro numa comissão. O sistema estava a gerar comissões incorretas e foi necessário fazer alterações na parte do sistema de forma a gerá-las corretamente e de seguida analisar novamente os meses entre maio de 2009 e dezembro de 2010 para essa comissão.

Todo o trabalho atrás mencionada refere-se a uma parte do trabalho de estágio. Esta aplicação estava desenvolvida para mais do que uma das redes de telecomunicações a que a empresa está associada.



## 4.4 Análise de Comissões

Para além do trabalho descrito nas secções anteriores, foi feito também um outro trabalho para uma das redes de telecomunicações onde são feitas atualizações mensais, logo após o pagamento de comissões.

Salienta-se que esta análise é em tudo diferente da descrita anteriormente. Apesar de serem comparados os produtos vendidos com o que se recebeu, esta comparação é feita, não com base em previsões, mas no que era efetivamente vendido.

Este estudo está dividido por áreas, tipo de tarifário, tipo de comissões, entre outras componentes.

Como já referido, a empresa trabalha com agentes comerciais, e quando lhes vende os produtos só receberá a comissão quando o agente vender o produto ao cliente, ou seja, a empresa vende num determinado mês mas o agente pode vendê-lo passado muito mais tempo. Ora, analisar com base nas vendas mensais não é tão credível como criar um sistema de previsões em que a análise é feita imediatamente após o produto ser vendido. Neste estudo também se avalia a veracidade das comissões pagas à empresa, mas apenas as recebidas, uma vez que podem existir mais comissões, mas como a empresa não está a prevêê-las não é possível verificar se existem ou não comissões em falta. No entanto, esta análise não deixa de ser importante, podendo daí tirar-se conclusões relevantes. Pode comparar-se, a partir das vendas, se as comissões dos produtos vendidos aos agentes são pagas ao longo dos meses. As atualizações foram feitas mensalmente em Excel e Powerpoint, com o qual era feita uma apresentação à administração e posteriormente à rede de telecomunicações em causa.

Sendo importante e necessário ter a capacidade de prever as comissões antes de receber os valores reais, foi necessário atualizar a aplicação para esta rede, uma vez que a existente estava desatualizada já há algum tempo. Esta tarefa foi realizada em conjunto com um colega do departamento de informática. Para fazer as devidas alterações na aplicação foi necessário, em primeiro lugar, ler de forma minuciosa e detalhada o manual de comissionamento da rede de forma a organizar a informação na aplicação o melhor

possível, para esta gerar as comissões a partir dos contratos. Esta parte inicial consumiu muitas horas de trabalho monótono, pois esta rede paga as comissões de uma forma muito complicada. Além disso, os documentos com as comissões pagas têm informação adicional muito escassa, sendo que a disponível é à base de siglas, tornando mais complicada ainda a sua interpretação. As alterações foram feitas no local onde eram inseridos os contratos. Foi, assim, feita uma interpretação das siglas, para que, de seguida, na parte da informática tudo funcionasse de forma mais expedita. Para além disso, também foram atualizados e inseridos tarifários na aplicação, com os respetivos valores a receber e a pagar aos agentes.

No final destas alterações, foi feita a análise dos meses de maio de 2010 até dezembro do mesmo ano. Esta análise foi feita de modo análogo, mas desta feita sem qualquer outra colaboração da parte de colegas de trabalho. Todos os meses foram revistos detalhadamente e as reclamações organizadas consoante o tipo de comissão, para depois serem conduzidas às entidades responsáveis. Esta tarefa foi realizada apenas nos últimos 2 meses do estágio e os objetivos foram concretizados, sendo que tudo foi finalizado no prazo pretendido.

Após concluir a análise mensal na folha de Excel em questão, os resultados são obtidos de forma automática para outras folhas. Os cálculos efetuados são vários. É feita a soma, em euros, das comissões e a quantidade destas, mensalmente. Num outro ficheiro, é feita uma análise geral desde o início da atividade <sup>2</sup>, onde se encontram todos os resultados mensais por comissão. Foram analisadas também, de forma independente, as comissões relativas às previsões e as comissões relativas ao que foi pago. A decisão de separar esta análise das restantes prende-se com o facto de existirem comissões que derivam de outras, e desta forma é possível verificar se a entidade que paga à empresa está a fazê-lo de forma correta. Serve ainda para confirmar se as comissões geradas estão corretas. Nesta componente do trabalho, para além de ter sido analisado todo o período de 2009 e o ano de 2010, ficou disponível a aplicação para que a análise para 2011 possa ser toda feita de forma automática. Estes ficheiros facilitam bastante o trabalho e reduzem o

---

<sup>2</sup>O trabalho para esta rede de telecomunicações iniciou-se no início em Junho de 2009

tempo despendido, já que desta forma não há necessidade de fazer verificações manualmente.

## 4.5 Análise de Reclamações

Uma outra tarefa realizada foi a análise das reclamações dos agentes comerciais. Da mesma forma que a empresa analisa o que lhe é pago e reclama, caso não corresponda ao que esperava da parte dos vários fornecedores de serviços, também os agentes analisam as comissões que lhes são pagas. Como é evidente, reclamam quando se acham prejudicados. De acordo com a reclamação do agente, é necessário verificar, nas aplicações, se as comissões realmente foram mal pagas ou se a rede de telecomunicações ainda não pagou à empresa.

Em suma, este estágio baseou-se na análise de comissões com o objetivo principal de melhorar as aplicações existentes no cálculo das previsões e no cruzamento dos dados para reduzir o número de erros e minimizar as perdas de dinheiro. Para a empresa, ficaram disponíveis algumas folhas em Excel que facilitarão bastante o trabalho de quem continuar com esta tarefa.

## Parte III

# Métodos do Gradiente para Otimização Não Linear



# Capítulo 5

## Introdução

A otimização surge em resposta a tomadas de decisão no intuito de se atingir o melhor resultado possível. Tem sido utilizada em vários contextos do quotidiano para o estudo e compreensão de vários fenómenos reais. Aplica-se essencialmente nas áreas da engenharia, economia, medicina, ciências aplicadas, finanças, entre outros. O objetivo final é encontrar soluções ótimas que se ajustem o melhor possível à realidade.

A formulação de um problema de otimização envolve a tomada de decisões, a definição de objetivos gerais e requisitos da actividade em questão, transformando-os numa série de argumentos matemáticos bem definidos. De uma forma mais precisa, a formulação de um problema de otimização envolve

1. a seleção de uma ou mais variáveis a serem otimizadas;
2. a escolha de uma função objectivo (a minimizar ou maximizar), e
3. a identificação de um conjunto de restrições.

O processo de otimização consiste na minimização ou maximização de uma função, que pode, ou não, estar sujeita a um conjunto de restrições nas variáveis [1, 4, 7].



# Capítulo 6

## Forma Geral do Problema

Em termos genéricos, um problema de otimização é definido por

$$\begin{aligned} & \underset{x \in \mathbb{R}^n}{\text{minimizar}} && f(x) \\ & \text{sujeito a} && c_i(x) = 0, \quad i = 1, \dots, m \\ & && h_j \leq 0, \quad j = 1, \dots, p \\ & && lb \leq x \leq ub \end{aligned} \tag{6.1}$$

em que  $x$  é o vetor das  $n$  variáveis de decisão,  $f(x)$  é a função objetivo,  $c(x)$  é o vetor das  $m$  restrições de igualdade,  $h(x)$  é o vetor das  $p$  restrições de desigualdade,  $lb$  e  $ub$  são os limites simples nas variáveis  $x$ .

Caso não haja restrições nas variáveis, o problema (6.1) torna-se mais simples e passa a representar-se apenas por

$$\underset{x \in \mathbb{R}^n}{\text{minimizar}} \quad f(x). \tag{6.2}$$

Para alguns casos particulares, os problemas de otimização podem ainda ser classificados de forma mais específica, tendo em conta os requisitos do problema a resolver. Assim, pode fazer-se a seguinte classificação de um problema de otimização:

- Linear / Não Linear
- Diferenciável / Não Diferenciável



- Sem Restrições / Com Restrições
- Unidimensional / Multidimensional
- Convexo / Não Convexo
- Pequena-Média Dimensão / Grande Dimensão
- Contínuo / Discreto
- Determinístico / Estocástico
- Uniobjetivo / Multiobjetivo

A escolha do método de resolução deve ser adequada às características do problema a resolver, para que o melhor resultado seja obtido da forma mais eficiente possível [4, 7].

Os métodos de resolução para problemas de otimização são, de uma maneira geral, desenvolvidos para calcular mínimos de funções. No entanto, existe uma relação direta entre o máximo e o mínimo de uma função, que pode ser usado quando se pretende usar um método formulado para calcular mínimos no cálculo de um máximo:

$$\max f(x) = -\min(-f(x)) \quad (6.3)$$

# Capítulo 7

## Condições de Otimalidade

### 7.1 Classificação de Mínimos e de Máximos

Encontrar o mínimo global num problema de otimização nem sempre é tarefa fácil. No entanto, por vezes, é suficiente encontrar-se um mínimo local numa determinada vizinhança. É, no entanto, importante ter-se noção de que tipo de ótimo está a ser calculado, e isso depende do método escolhido.

Num problema de otimização do tipo (6.2) pretende calcular-se o mínimo ou máximo de uma função, isto é, verifica-se  $f(x^*) \leq f(x)$  e  $f(x^*) \geq f(x)$ , respetivamente, para todo o  $x \in \mathbb{R}^n$ , se o mínimo (ou máximo) for global ou numa vizinhança se o mínimo (ou máximo) for local.

As explicações que se seguem dizem respeito apenas a mínimos, sendo que podem ser facilmente estendidas a máximos pela propriedade (6.3)

**Definição 7.1.** *Mínimo global*

Um ponto  $x^*$  é chamado mínimo global do problema (6.2) se  $x^* \in \mathbb{R}^n$  e  $\forall x \in \mathbb{R}^n, f(x^*) \leq f(x)$ . Se  $f(x^*) \leq f(x)$  para todo  $x \in \mathbb{R}^n$  e  $x \neq x^*$ , então  $x^*$  é um mínimo global de  $f$  em  $\mathbb{R}$ .

**Definição 7.2.** *Mínimo Local*

Um ponto  $x^*$  é chamado mínimo local do problema (6.2) se  $x^* \in \mathbb{R}^n$  e  $\forall x \in \mathbb{R}^n \cap N_\epsilon, f(x^*) \leq f(x)$ , em que  $N_\epsilon$  é uma vizinhança de  $x^*$  de raio  $\epsilon$ . Se  $f(x^*) \leq f(x)$  para todo  $x \in \mathbb{R}^n$  e  $x \neq x^*$  a uma determinada distância  $\epsilon$  de  $x^*$ , então  $x^*$  é um mínimo local de  $f$  em  $\mathbb{R}$ .

## 7.2 Condição Necessária e Suficiente de Primeira Ordem

Seja  $x^*$  um minimizante local e  $f$  uma função continuamente diferenciável. Então  $\nabla f(x^*) = 0$ . A equação  $\nabla f(x^*) = 0$  define os pontos estacionários de  $f$ . Os pontos estacionários são pontos candidatos a maximizantes, minimizantes ou pontos sela. Um ponto sela é um ponto estacionário que não é mínimo nem máximo, ou seja, uma vizinhança do ponto  $x^*$  contém pontos tais que  $f(x^*) > f(x)$  e outros em que  $f(x^*) < f(x)$ .

## 7.3 Condição Necessária de Segunda Ordem

Seja  $x^*$  um minimizante local que satisfaz a condição de primeira ordem e  $f$  uma função continuamente diferenciável. Então a condição necessária para que  $x^*$  seja minimizante é que  $\nabla^2 f(x^*)$  seja semi-definida positiva e a condição necessária para que  $x^*$  seja maximizante é que  $\nabla^2 f(x^*)$  seja semi-definida negativa.

## 7.4 Condição Suficiente de Segunda Ordem

Seja  $x^*$  um minimizante local que satisfaz a condição de primeira ordem e  $f$  uma função continuamente diferenciável. Então a condição suficiente para que  $x^*$  seja minimizante é que  $\nabla^2 f(x^*)$  seja definida positiva, a condição suficiente para que  $x^*$  seja maximizante é que  $\nabla^2 f(x^*)$  seja definida negativa e a condição suficiente para que  $x^*$  seja ponto sela é que  $\nabla^2 f(x^*)$  seja indefinida [2, 5].

## 7.5 Convexidade

**Definição 7.3.** *Conjunto Convexo*

Um conjunto  $S$  diz-se convexo se para todo  $x_1, x_2 \in S$

$$\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2 \in S$$

para todo  $0 \leq \alpha \leq 1$ . Ou seja, se  $x_1$  e  $x_2$  pertencem a  $S$ , então o segmento de reta que contém estes dois pontos também pertence a  $S$ .

**Definição 7.4.** *Função Convexa*

Uma função  $f$ , definida num conjunto  $S$  convexo, é convexa se para todo  $x_1, x_2 \in S$  e todo  $0 \leq \alpha \leq 1$ ,

$$f(\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2) \leq \alpha f(x_1) + (1 - \alpha)f(x_2).$$

Se para todo  $0 < \alpha < 1$  e  $x_1 \neq x_2$ ,

$$f(\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2) < \alpha f(x_1) + (1 - \alpha)f(x_2),$$

então,  $f$  é estritamente convexa.

Relativamente à concavidade de uma função, esta deriva do mesmo pressuposto apresentado na propriedade (6.3).

**Definição 7.5.** *Função côncava*

Uma função  $g$  definida num conjunto  $S$  convexo, é côncava se a função  $f = -g$  for convexa. A função  $g$  é estritamente côncava se  $-g$  é estritamente convexa.

Se a função  $f$  for diferenciável, as Definições 7.3 e 7.4 podem escrever-se da seguinte forma.

**Proposição 7.1.** *Seja  $f$  diferenciável uma vez. Então,  $f$  é convexa num conjunto  $S$  convexo se e só se*

$$f(y) \geq f(x) + \nabla f(x)f(y - x),$$

para todo  $x, y \in S$ .

**Proposição 7.2.** *Seja  $f$  diferenciável duas vezes. Então,  $f$  é convexa num conjunto  $S$  convexo se e só se a matriz Hessiana,  $\nabla^2 f(x)$  for semi-definida positiva em todo o conjunto.*

# Capítulo 8

## Método de Newton

O método de Newton é um método do gradiente. Como tal, é um método que faz uso das derivadas, utilizando as primeiras derivadas - o vetor gradiente - e as segundas derivadas - a matriz Hessiana.

**Definição 8.1.** *Vetor gradiente*

*O vetor gradiente contém as primeiras derivadas parciais de  $f$  e é dado por*

$$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{pmatrix}.$$

O princípio do método de Newton é aproximar o problema (6.2) no iterando  $x^k$  através de uma função quadrática, obtida pela expansão da função em série de Taylor, truncada no termo de segunda ordem.

Seja  $x^k$  uma aproximação à solução  $x^*$ . A expansão em série de Taylor de  $f$ , no ponto  $x^{k+1} = x^k + d$  é dada por

$$f(x^k + d) = f(x^k) + \nabla f(x^k)^T d_N^k + \frac{1}{2} d^T \nabla^2 f(x^k) d_N^k + \dots.$$

Utilizando os três primeiros termos da série obtém-se uma função quadrática em  $d$ , dada por

$$f(x^k + d) \approx q(d) = f(x^k) + \nabla f(x^k)^T d_N^k + \frac{1}{2} d^T \nabla^2 f(x^k) d_N^k.$$

O mínimo de  $q(d)$  vai originar uma nova aproximação ao mínimo de  $f(x)$ .

Se se derivar  $q(d)$  em ordem a  $d$  e se igualar o resultado a zero, é satisfeita a condição de primeira ordem para o mínimo da quadrática,  $\nabla q(d) = 0$  e obtém-se

$$\nabla f(x^k) + \nabla^2 f(x^k) d_N^k = 0,$$

ou seja,

$$\nabla^2 f(x^k) d_N^k = -\nabla f(x^k). \quad (8.1)$$

A equação (8.1) define o sistema Newton, que é linear, e a sua solução,  $d_N^k$ , é a direção Newton.

Como a aproximação a  $f$  por um modelo quadrático é válida apenas numa pequena vizinhança de  $x^k$ , a solução  $d_N^k$  do problema quadrático vai originar uma nova aproximação à solução de (6.2),

$$x^{k+1} = x^k + d_N^k, \quad (8.2)$$

que não é necessariamente o minimizante de  $f$ , havendo a necessidade do processo ser repetido iterativamente.

## 8.1 Propriedades do Método de Newton

A convergência do Método de Newton é local, ou seja, se a aproximação inicial  $x^1$  não se encontrar na vizinhança da solução, a convergência não é garantida. Esta convergência é designada por convergência quadrática, já que

$$\|x^{k+1} - x^*\| \leq \gamma \|x^k - x^*\|^2, \gamma > 0.$$

Este método possui ainda a propriedade da terminação quadrática - se  $f(x)$ , com  $x \in \mathbb{R}^n$ , for uma função quadrática e convexa o método de Newton necessita, no máximo, de  $n$  iterações para encontrar a solução exata do problema.

## 8.2 Limitações do Método de Newton

O método de Newton tem algumas limitações, já que nem sempre é possível calcular  $d_N^k$  por (8.1) caso a matriz Hessiana seja singular. Ainda que seja possível calculá-la, pode acontecer que esta não origine um iterando  $x^k + d^k$  de forma a que se verifique  $f(x^k + d^k) < f(x^k)$ . Assim,

- a matriz  $\nabla^2 f(x^k)$  do sistema de Newton em (8.1), pode ser singular, isto é, não admite inversa, o que significa que o sistema Newton (8.1) não tem solução ou tem uma infinidade de soluções. Isto implica a não existência de uma direção única;
- a direção Newton  $d_N^k$ , solução do sistema de Newton em (8.1), pode ser ascendente para  $f$  em  $x^k$ , isto é,

$$\nabla f(x^k)^T d_N^k > 0;$$

- a direção Newton  $d_N^k$ , solução do sistema Newton em (8.1), pode ser ortogonal ao gradiente em  $x^*$ , ou seja,

$$\nabla f(x^k)^T d_N^k = 0;$$

- a direção Newton  $d_N^k$ , solução do sistema Newton em (8.1), mesmo sendo descendente, isto é,  $\nabla f(x^k)^T d_N^k < 0$ , pode ser muito grande e por isso não se verifica  $f(x^k + d_N^k) < f(x^k)$ .

## 8.3 Desvantagens do Método de Newton

O Método de Newton, como se viu nas secções anteriores, exige o cálculo de segundas derivadas, o que no caso de uma função que apresente uma expressão complicada, tornam-se difíceis de calcular. Por outro lado, quando  $n$  é grande é exigido um grande esforço de cálculo, já que a dimensão de  $\nabla^2 f(x)$  é  $n \times n$ . O facto da convergência deste método ser local também é uma desvantagem, sendo que obriga a que a escolha do iterando inicial tenha de se encontrar numa vizinhança da solução.



Estas desvantagens podem ser ultrapassadas. No caso da convergência local do Método de Newton, pode ser implementada uma técnica de globalização que garanta que o método converge para uma solução a partir de qualquer aproximação inicial, como será descrito no Capítulo 9. O cálculo das segundas derivadas também pode ser evitado usando-se uma estratégia do tipo quasi-Newton, que se apresenta no Capítulo 10.

## Capítulo 9

# Técnicas de Globalização

Existem várias técnicas de globalização, entre as quais constam a procura unidimensional, nas vertentes da procura unidimensional exata e da procura unidimensional aproximada, as técnicas baseadas em regiões de confiança e, mais recentemente, algoritmos que usam a técnica dos filtros.

### 9.1 Procura Unidimensional - Critério de Armijo

Uma das técnicas de globalização mais utilizadas é a procura unidimensional baseada no critério de Armijo. Para garantir que numa nova aproximação o valor de  $f(x^{k+1})$  seja inferior a  $f(x^k)$ , é necessário em cada iteração calcular o comprimento do passo,  $\alpha^k$ . Pretende-se que para  $x^k$ ,  $d^k$  e  $0 < \mu < \frac{1}{2}$  se verifique

$$f(x^k + \alpha^k d^k) \leq f(x^k) + \mu \alpha^k \nabla f(x^k)^T d^k. \quad (9.1)$$

Garante-se, assim, uma descida significativa no valor da função no novo iterando,  $x^k + \alpha^k d^k$ .

Se se verificar  $\nabla f(x^k)^T d^k < 0$ , ou seja,  $d^k$  é descendente para  $f$ , então existe um valor de  $\alpha^k \in (0, 1]$  que verifica a condição de Armijo (9.1).



# Capítulo 10

## Método Quasi-Newton

Para se evitar o cálculo de segundas derivadas pode usar-se em vez da matriz Hessiana uma aproximação. É desta ideia que surgem os métodos do tipo quasi-Newton. No cálculo desta aproximação este método usa apenas o vetor gradiente, isto é, as primeiras derivadas parciais da função  $f$ , tornando desta forma a resolução do problema menos dispendiosa em termos de cálculos. Seja,

$$B^k \approx \nabla^2 f(x^k).$$

Então

$$B^k d_{QN}^k = -\nabla f(x^k).$$

No entanto, o sistema Newton (8.1) pode ser escrito de forma equivalente

$$d_N^k = -(\nabla^2 f(x^k))^{-1} \nabla f(x),$$

pelo que, em cada iteração  $k$  pode usar-se uma aproximação à inversa da Hessiana, em vez de se usar uma aproximação à Hessiana, isto é,

$$H^k \approx (\nabla^2 f(x^k))^{-1}$$

e calcula-se a direção de procura,

$$d_{QN}^k = -H^k \nabla f(x^k).$$

Desta forma, evita-se ainda a resolução de um sistema linear em cada iteração, sendo esta substituída pelo cálculo de um produto de uma matriz por um vetor, que é bastante mais simples.

## 10.1 A Matriz $H$

A matriz  $H$  deve ser aproximada, o melhor possível, à inversa de  $\nabla^2 f(x^k)$ , ou seja, deve possuir as mesmas características que a matriz Hessiana - ser simétrica e definida positiva - para se garantir que a direção  $d_{QN}^k$  é descendente para  $f$ . Para isso deve verificar-se a condição secante

$$H^k y^{k-1} = s^{k-1},$$

em que,

$$y^{k-1} = \nabla f(x^k) - \nabla f(x^{k-1})$$

representa a variação do gradiente em duas iterações consecutivas e

$$s^{k-1} = x^k - x^{k-1} = \alpha^{k-1} d_{QN}^{k-1}$$

representa a variação em  $x$  em duas iterações consecutivas.

A cada nova iteração é gerada uma nova matriz  $H^k$ . A atualização desta matriz é efetuada da seguinte forma:

$$H^k = H^{k-1} + E^{k-1},$$

em que a definição da matriz  $E^{k-1}$  depende da fórmula de atualização escolhida.

Para iniciar o processo iterativo, deve escolher-se uma matriz que seja simétrica e definida positiva. Pode usar-se, por exemplo, a matriz identidade, isto é,

$$H^1 = I.$$

Esta aproximação não é necessariamente boa, mas ao longo das iterações as aproximações a  $H^k$  vão-se aproximando cada vez mais da matriz inversa da

Hessiana que estão a aproximar.

Ao longo das iterações é normal que se acumulem erros numéricos, devidos essencialmente a arredondamentos quando se calcula a matriz  $H$ , sendo que esta pode deixar de ser definida positiva e assim a direção  $d_{QN}^k$  deixa de ser descendente para  $f$ . Quando isto se verifica, faz-se novamente  $H^k = I$ , uma vez que a matriz  $I$  é definida positiva. Quando isto acontece, à semelhança da primeira iteração,  $d_{QN}^k = -\nabla f(x^k)$ , sendo esta direção conhecida como direção de descida máxima.

Existem muitas fórmulas para o cálculo de  $H^k$ , mas devem preferir-se as que conservam a matriz  $H^k$  definida positiva ao longo das iterações. São exemplo disso as duas fórmulas de atualização que a seguir se apresentam.

#### **Fórmula de atualização de Davidon, Fletchen e Powell (DFP)**

$$H^k = H^{k-1} - \frac{H^{k-1}y^{k-1}(y^{k-1})^T H^{k-1}}{(y^{k-1})^T H^{k-1}y^{k-1}} + \frac{s^{k-1}(s^{k-1})^T}{(s^{k-1})^T y^{k-1}} \quad (10.1)$$

#### **Fórmula de atualização de Broyden, Fletchen, Goldfarb e Shanno (BFGS)**

$$H^k = \left( I - \frac{s^{k-1}(y^{k-1})^T}{(s^{k-1})^T y^{k-1}} \right) H^{k-1} \left( I - \frac{y^{k-1}(s^{k-1})^T}{(s^{k-1})^T y^{k-1}} \right) + \frac{s^{k-1}(s^{k-1})^T}{(s^{k-1})^T y^{k-1}} \quad (10.2)$$

## **10.2 Propriedades do Método Quasi-Newton**

O Método Quasi-Newton tem convergência local e a propriedade da terminação quadrática, tal como o Método de Newton, já que deriva diretamente deste. No entanto, este método perde um pouco da rapidez de convergência em relação ao método de Newton, uma vez que neste caso a convergência é superlinear (recorde-se que a razão de convergência do método de Newton é quadrática), ou seja,

$$|x^{k+1} - x^*| \leq \gamma_k |x^k - x^*|,$$

com  $\{\gamma_k\} \rightarrow 0$  quando  $k \rightarrow \infty$ .



## Parte IV

# Otimização de um Problema Real





# Capítulo 11

## Descrição do Problema

Depois do trabalho na empresa, foi feito um estudo detalhado dos dados para se perceber até que ponto seria possível otimizar algum dos processos existentes. Após uma pesquisa na literatura de alguns problemas reais, percebeu-se que se poderia adaptar à realidade da empresa um problema de produção, de forma a otimizar os lucros com base em produtos disponibilizados, bem como em fatores de ponderação que são pagos aos agentes de distribuição.

A formulação do problema em questão foi baseado num problema de produção existente [3] que foi estendido ao caso concreto da empresa, em que são considerados três produtos diferentes, e pode ser formulado como

$$\begin{aligned} P = & \alpha_1(1 - e^{-\beta_1 x_1} - \beta_1 x_1 e^{-\beta_1 x_1}) + \\ & \alpha_2(1 - e^{-\beta_2 x_2} - \beta_2 x_2 e^{-\beta_2 x_2}) + \\ & \alpha_3(1 - e^{-\beta_3 x_3} - \beta_3 x_3 e^{-\beta_3 x_3}) + \\ & \alpha_4(1 - e^{-\beta_1 x_1 x_2 x_3}) - x_1 - x_2 - x_3, \end{aligned} \quad (11.1)$$

onde  $x_1$ ,  $x_2$  e  $x_3$  se referem às unidades monetárias gastas nos produtos 1, 2 e 3, respetivamente. Os  $\alpha_i$ 's são constantes e dizem respeito às mensalidades dos produtos. Quanto às constantes  $\beta_i$ 's, referem-se aos ponderadores, que servem como base de cálculo para os montantes que são pagos aos agentes distribuidores dos produtos em causa.



## Capítulo 12

# Resolução do Problema em MATLAB<sup>R</sup>

A resolução do problema apresentado no Capítulo 11 foi feita no *software* MATLAB<sup>R</sup>, usando a função `fminunc` da *toolbox* de otimização. Perante as características do problema resultante, que é não linear, sem restrições, diferenciável e convexo, a melhor opção é esta função, que implementa o método de Newton com regiões de confiança, quando se trata de um problema de grandes dimensões, ou o método quasi-Newton com procura unidimensional, caso o problema seja de pequenas ou médias dimensões. Como (11.1) tem apenas três variáveis, o problema é claramente de pequenas dimensões, pelo que o método a ser implementado é o quasi-Newton com procura unidimensional. Nesta função há a possibilidade de se introduzirem as derivadas ou permitir ao MATLAB<sup>R</sup> que as avalie numericamente, sendo que quando não são fornecidas o `fminunc` usa sempre o método quasi-Newton com procura unidimensional. A sintaxe desta função é

```
>> [x,fval,exitflag,output]=fminunc('myfun',x0,options)
```

em que os parâmetros de saída são

- `x` minimizante (vetor)
- `fval` mínimo da função
- `exitflag` informação sobre a convergência
  - `>0` o processo convergiu
  - `=0` o processo ainda não convergiu mas pode vir a convergir alterando parâmetros do algoritmo
  - `<0` o processo não convergiu
- `output` informações sobre o processo iterativo
  - `iterations` número de iterações realizadas
  - `funcCount` número de avaliações da função
  - `stepsize` tamanho do passo na procura unidimensional
  - `firstorderopt` medida de estacionaridade
  - `algorithm` algoritmo usado,

os parâmetros de entrada são

- `myfun` nome do ficheiro `.m` onde se encontra a função
- `x0` vetor inicial
- `options` estrutura que permite alterar parâmetros do algoritmo
  - `optimset('fminunc')` opções disponíveis
  - `fminunc('defaults')` valores por defeito

e as opções mais importantes e respetivos valores por defeito são

- `LargeScale` informação sobre a dimensão do problema [ **on** — off ]
- `TolX` erro relativo em  $x$  [**1.0000e-006**]

Tabela 12.1: Valores usados para as constantes do problema (11.1)

$i$	1	2	3
$\alpha_i$ (mensalidade)	15€	25€	40€
$\beta_i$ (ponderador)	1.2	1.75	1.9

- **TolFun** erro relativo em  $f$  [**1.0000e-006**]
- **GradObj** gradiente da função objetivo definido pelo utilizador  
[ on — **off** ]
- **MaxFunEvals** número máximo de cálculos de função [**100\*numberOfVariables**]
- **MaxIter** número máximo de iterações [**400**]
- **Hessian** Hessiana da função objetivo definida pelo utilizador  
[ on — **off** ]
- **HessUpdate** esquema de actualização quasi-Newton  
[ **bfgs** — dfp — gillmurray — steepdesc ]
- **Display** nível de exibição dos resultados  
[ off — iter — notify — **final** ]

O problema será resolvido usando as fórmulas de atualização de DFP (10.1) e BFGS (10.2), para que se possam comparar os resultados. Todos os outros parâmetros do algoritmo são os que se encontram por defeito no MATLAB<sup>R</sup> e por isso não serão fornecidas primeiras derivadas do problema.

Os valores usados para as constantes são os utilizados pela empresa. Nas mensalidades ( $\alpha_i$ ) considerou-se um valor médio e os ponderadores ( $\beta_i$ ) são os usados para calcular os montantes pagos aos agentes distribuidores. Apresentam-se na Tabela 12.1 esses valores. É de referir que atualmente existem produtos que dão prejuízo à empresa, já que nenhum processo de otimização de lucros se encontra implementado.

Foi guardado num ficheiro `.m` a função a otimizar, tal como anteriormente descrita. Este ficheiro é do tipo função e tem como parâmetro de saída `P`, e como parâmetro de entrada `x`. `P` é a função a minimizar, já que o `fminunc` só calcula mínimos. Uma vez que se pretende maximizar o lucro, usando a função descrita em (11.1), recorre-se à propriedade (6.3). O parâmetro de entrada é o vetor `x` que contém as variáveis  $x_1$ ,  $x_2$  e  $x_3$ . Cada vez que a função `fminunc` necessita do avaliar o valor da função num determinado ponto, acede a este ficheiro. As mensalidade `m` são multiplicadas por  $10^{-5}$  uma vez que no problema original os valores de  $x$  são dessa ordem de grandeza. Só desta forma o problema se torna coerente e converge.

---

```
function P=prod2(x)
alfa=[2;1;1;1];
beta=[1.2;1.75;1.9;1];
m=[15;25;40];
m=m*1e-5;
f=alfa(1)*(1-exp(-beta(1)*m(1)*x(1)))+alfa(2)*(1-exp(-beta(2)*m(2)*x(2)))
+alfa(3)*(1-exp(-beta(3)*m(3)*x(3)))
+alfa(4)*(1-exp(-beta(4)*m(1)*x(1)*m(2)*x(2)*m(3)*x(3)))
-m(1)*x(1)-m(2)*x(2)-m(3)*x(3);
P=-f;
```

---

Para os comandos que invocam a função `fminunc`, construiu-se um ficheiro do tipo *script*. Os ficheiros deste tipo, ao contrário das funções, não têm parâmetros de entrada ou saída, apenas executam linha a linha, e de forma sequencial, os comandos lá escritos. Assim, para resolver o problema usando a fórmula BFGS usa-se o *script* seguinte:

---

```
clear all
x0=[1;1;1];
[x,fval,exitflag,output]=fminunc('prod2',x0)
```

---

`x0` é o vetor com a aproximação inicial e `prod2` o nome do ficheiro `.m` que contém a função a minimizar. Uma vez que não se definem opções, todos os valores desta estrutura são os que aparecem por defeito no MATLAB<sup>R</sup>. Significa que, neste caso, a fórmula de atualização usada é a BFGS.



Para se resolver o problema usando a fórmula de atualização DFP, terá de se alterar esta opção, como se mostra no *script* seguinte:

---

```
clear all
x0=[1;1;1];
options=optimset('Hessupdate','DFP');
[x,fval,exitflag, output]=fminunc('prod2',x0,options)
```

---

# Capítulo 13

## Resultados

Correndo o primeiro *script*, onde é usada a fórmula de atualização BFGS, o *output* do MATLAB<sup>R</sup> é o seguinte,

---

`x =`

`1.0e+003 *`

`6.5663`

`2.5137`

`1.5611`

`fval =`

`-0.8311`

`exitflag =`

`1`

output =

```
iterations: 12
funcCount: 76
stepsize: 1
firstorderopt: 4.0066e-007
algorithm: 'medium-scale: Quasi-Newton line search'
```

---

De igual modo, correndo o *script* que usa a fórmula de atualização DFP, os resultados obtidos são

---

x =

```
1.0e+003 *

6.5459
2.5180
1.5617
```

fval =

```
-0.8311
```

exitflag =

```
1
```

output =

```
iterations: 18
funcCount: 100
stepsize: 1
firstorderopt: 9.0566e-007
algorithm: 'medium-scale: Quasi-Newton line search'
```

---

Observa-se que, utilizando as duas fórmulas de atualização da matriz  $H$  diferentes, os resultados são bastante idênticos, sendo que a principal diferença se observa no número de iterações e cálculos de função realizados. Com a fórmula BFGS são realizados menos iterações e cálculos de função (12 e 76, respetivamente), enquanto com a fórmula DFP são realizados 18 iterações e 100 cálculos de função.

Em ambos os casos, o processo iterativo convergiu, já que `exitflag=1` e a medida de otimalidade é na ordem de  $10^{-7}$ .

Tal como se pretendia, o algoritmo usado foi o do método quasi-Newton com procura unidimensional.

Pode concluir-se que para a empresa atingir o lucro máximo, de 83110 unidades monetárias, devem vender-se cerca de 6500 produtos a uma mensalidade média de 15 €, cerca de 2500 produtos a uma mensalidade média de 25 € e para os produtos com uma mensalidade média de 40 € devem vender-se cerca de 1500 unidades.



# Parte V

## Conclusões



A atividade realizada na empresa foi realizada com sucesso. Todos os objetivos impostos foram concretizados nas datas propostas para a sua finalização. Sendo um trabalho de extrema importância para a empresa, no sentido de se poderem controlar todas as comissões e ter a capacidade de classificar os erros, minimizando as eventuais perdas, foi necessário muito rigor nas datas de cumprimento do trabalho exigido, bem como a capacidade de manter boas relações com vários departamentos, uma vez que se trata de um trabalho de equipa.

Quanto à melhoria das aplicações existentes, o trabalho teve muito impacto. De momento, as previsões são mais rigorosas e o número de erros é bastante inferior ao inicial. Desta forma, as contestações podem ser feitas com mais certezas e num espaço de tempo mais curto. Daqui pode aferir-se que a estratégia utilizada facilitou bastante a análise das comissões. Para além de se descobrir o erro com maior facilidade, diminui-se o tempo necessário para proceder uma análise mensal. Também torna esta análise mais independente, não havendo uma dependência tão forte das *backoffices* na finalização das correções.

As análises realizadas no final do estágio, onde se encontra toda a atividade de uma das redes, é uma mais valia para a empresa. Com esses dados pode-se avaliar o comportamento de vários itens, analisando nesse sentido o percurso da empresa ao longo do tempo. Os resultados obtidos são um meio para fomentar as contestações bem fundamentadas.

No parte final do relatório apresenta-se uma aplicação dos métodos de otimização no contexto laboral da empresa. Verificou-se a importância da otimização, no controlo das vendas de vários produtos, para se atingirem lucros máximos. Os resultados obtidos, em ambas as resoluções, são bastante idênticos. Conclui-se que as aproximações da matriz  $H$  por (10.1) e por (10.2) convergem para um resultado válido e que, qualquer uma pode ser utilizada na resolução do problema. No entanto, verificou-se que a fórmula (10.2) é, neste problema, mais eficiente em termos computacionais. Esta abordagem pode ser alargada a outros setores da empresa. Desta forma há um maior controlo sobre o número ideal de produtos a serem vendidos.



Seria de grande valia para a empresa usar processos de otimização nos seus problemas laborais.

# Bibliografia

- [1] Bhatti, M. Asghar, Practical optimization methods : with mathematica applications, Springer (2000).
- [2] Costa, Lino e Espírito Santo, Isabel, Texto de Apoio Métodos Numéricos C - Mestrado Integrado em Engenharia de Comunicações (2010).
- [3] Fernandes, Edite, Caderno de exercícios da disciplina de Métodos Matemáticos para o Mestrado em Estatística de Sistemas, Universidade do Minho (2009).
- [4] Fernandes, Edite, *slides* da disciplina de Métodos Matemáticos para o Mestrado em Estatística de Sistemas, Universidade do Minho (2009).
- [5] Luenberger, David G., Linear and nonlinear programming, Kluwer Academic Publishers (2003).
- [6] Nash, Stephen G. and Sofer, Ariela, Linear and Nonlinear Programming, McGRAW-HILL INTERNACIONAL EDITIONS, (1996).
- [7] Nocedal, Jorge e Wright, Stephen J., Numerical Optimization, Springer Series in Operations Research, Springer (1999).
- [8] Richardson, Bill and Richardson, Roy, A Gestão Estratégica, trad. Carlos Pacheco, Biblioteca de Gestão Moderna, 1ª edição Lisboa Presença (1992)
- [9] Manual da Qualidade - X R(6) (2010).

- [10] Manual de Acolhimento - X R(3) (2010).
- [11] <http://www.tecnologiadoglobo.com/2009/10/curiosidades-interessantes-sobre-telefones-e-telemeveis>
- [12] <http://www.telecom.pt/InternetResourcePT/SitePT/Canais/SobreaPT/Quem+SomosA+noss>
- [13] <http://tecnologia.uol.com.br/ultimas-noticias/redacao/2011/01/26/internet-alcanca-marca-de-2-bilhoes-de-usuarios-diz-onu.jhtm>
- [14] [http://www.dn.pt/inicio/interior.aspx?content\\_id=616281](http://www.dn.pt/inicio/interior.aspx?content_id=616281)
- [15] <http://eletronicos.hsw.uol.com.br/guia-para-compra-de-tv13.htm>
- [16] [http://whatis.techtarget.com/definition/0,,sid9\\_gci1192492,00.html](http://whatis.techtarget.com/definition/0,,sid9_gci1192492,00.html)
- [17] <http://pt.wikipedia.org/wiki/IPTV>